CONCOURS DE RECRUTEMENT DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE

ET DES INGENIEURS TITULAIRES

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 H 00

Coef. : 2

RAPPEL DE DEFINITIONS

Soit $\phi : t \mapsto \phi(t)$ une fonction à valeurs réelles de la variable réelle t, intégrable sur tout intervalle fermé et borné de l'ouvert $]a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$.
Si $\int_x^X \phi(t)\,dt$ a une limite finie quand x tend vers a (avec $x > a$) et X tend vers $+\infty$, les variables x et X étant indépendantes, on dit que cette limite, que l'on représente par $\int_a^{+\infty} \phi(t)\,dt$, est l'intégrale généralisée de $\phi(t)$ sur $]a, +\infty[$; on dit aussi que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \phi(t)\,dt$ est convergente.

PROBLEME

Première partie

I.1. Pour quelles valeurs du nombre réel α l'intégrale

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\sqrt{t-1}}$$

est-elle convergente ? Pour tout entier p positif ou nul établir une relation entre I_{p+1} et I_p et en déduire que

$$I_p = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\pi$$

Montrer que I_p admet une limite lorsque p tend vers $+\infty$.
On admet la formule suivante, que l'on ne demande pas de démontrer,

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{p!}{\sqrt{2\pi p}\; p^p\, e^{-p}} = 1 ;$$

en déduire pour p infiniment grand un équivalent de I_p ainsi que la limite de I_p lorsque p tend vers $+\infty$.

I.2. On considère la fonction réelle des deux variables réelles x et t

$$G : (x, t) \longmapsto G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t(t-1)}\,(t-x)}$$

définie pour $t > 1$ et $t > x$.

Montrer que pour tout $t \in]1, +\infty[$, la fonction

$$g_t : x \longmapsto g_t(x) = G(x,t)$$

est développable en série entière sous la forme

$$g_t(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p(t)\, x^p$$

sur un intervalle ouvert que l'on précisera ; montrer que les coefficients $a_p(t)$ peuvent s'exprimer sous la forme

$$a_p(t) = A_p\, f_p(t)$$

où A_p est indépendant de t et où $f_p(t) = \frac{1}{t^{p+1}\sqrt{t-1}}$;

Vérifier que pour chaque t fixé supérieur à 1 la suite numérique $(a_0(t), a_1(t), \ldots a_p(t), \ldots)$ est décroissante.

I.3. n étant entier positif, montrer que, pour tout $t > 1$, la dérivée $g_t^{(n)}$ d'ordre n par rapport à x de g_t est développable en série entière sous la forme

$$g_t^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}(t)\, x^p$$

sur un intervalle ouvert que l'on précisera ; montrer que les coefficients $a_{n,p}(t)$ peuvent s'exprimer sous la forme

$$a_{n,p}(t) = A_{n,p}\, f_{n+p}(t)$$

où $A_{n,p}$ est indépendant de t.

Deuxième partie

II.1. Déterminer l'ensemble des réels sur lequel la fonction

$$J : x \longmapsto J(x) = \int_1^{+\infty} G(x,t)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}\,(t-x)}$$

est définie ; montrer que sur cet ensemble $J(x)$ est fonction croissante de x.

Vérifier que pour tout $h > 0$

$$J(1-h) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t-1+h)\sqrt{t}}$$

et, calculant l'intégrale du second membre de cette inégalité, montrer que $J(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 tout en restant dans l'intervalle où $J(x)$ est défini.

Vérifier que pour tout $u > 0$ et tout $t > 0$

$$t + u \geqslant 2\sqrt{t\,u}$$

et en déduire que pour tout $u > 0$

$$J(-u) \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{4u}} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/4}\sqrt{t-1}}$$

Montrer alors que $J(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $-\infty$ et donner la valeur de cette limite.

Montrer que pour tout x et tout h tels que $x < 1$ et $x + h < 1$

$$|J(x+h) - J(x)| \leqslant \frac{|h|}{\sqrt{1-x-h}\,\left[\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x-h}\right]} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}\,(t-x)}.$$

Quelle propriété de J en déduit-on ?

II.2. On suppose que $x \in]-1, +1[$. Les nombres $a_p(t)$ étant les coefficients du développement en série entière de g_t étudié au I.2., on pose :

$$S_k(x,t) = \sum_{p=0}^{k} a_p(t)\,x^p \quad , \quad R_k(x,t) = \sum_{p=k+1}^{+\infty} a_p(t)\,x^p \quad , \quad G(x,t) = S_k(x,t) + R_k(x,t)$$

Démontrer que $|R_k(x,t)| \leqslant a(t)_{k+1}\ \frac{|x|^{k+1}}{1-|x|}$. En déduire que l'intégrale

$\int_1^{+\infty} R_k(x,t)\,dt$ est convergente et que

$$J(x) = \lim_{k \to +\infty} \int_1^{+\infty} S_k(x,t)\,dt.$$

Montrer alors que pour tout $x \in]-1, +1[$ la fonction J est développable en série entière sous la forme

$$J(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p\,x^p ;$$

exprimer b_p en fonction de I_p (défini au I.1.) ; déterminer le rayon de convergence de cette série entière et montrer qu'elle converge pour $x = -1$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail